İNTEGRAL

$f: R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$f'(x)\,dx$ ifadesine f fonksiyonunun **diferansiyeli** denir.

Diferansiyel $dy = d(f(x)) = f'(x)\,dx$ biçiminde ifade edilir.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + c}$$

$$\boxed{d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)}$$

1) $\int x\,f(x)\,dx = x^2 + x + c$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonu nedir?

$$x.f(x)\,dx = (2x+1)\,dx$$

$$x.f(x) = 2x+1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

2) $\int f(x+1)\,dx = x^2 + \ln x + e^{x-3} + 4$ olduğuna göre $f(4)$ ün değeri nedir?

$$f(x+1)\,dx = \left(2x + \frac{1}{x} + e^{x-3}\right)dx$$

$$f(x+1) = 2x + \frac{1}{x} + e^{x-3}$$

$x \to 3$

$$f(4) = 6 + \frac{1}{3} + 1$$

$$= 7 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{22}{3}$$

- **Temel integral formülleri:**

$$\boxed{\int a\,dx = ax + c}$$

$$\int 3\,dx = 3x + c$$

$$\int -dx = -x + c$$

$$\int \frac{3}{4}\,dx = \frac{3x}{4} + c$$

$$\int 2\,du = 2u + c$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c$$

$$\int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\boxed{\int c.f(x)\,dx = c.\int f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx}$$

$$\int (4x-3)\,dx = \int 4x\,dx - \int 3\,dx = \frac{4x^2}{2} - 3x + c$$

$$\int (6x^2+4x+5)\,dx = 6.\frac{x^3}{3} + 4.\frac{x^2}{2} + 5x + c$$

$$= 2x^3 + 2x^2 + 5x + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{2}{x}dx = 2.\ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + c$$

$$\int \frac{du}{u+3} = \ln|u+3| + c$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

$$\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

$$\int e^{x+1}dx = e^{x+1} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$\int \sin(4x+1)\,dx = -\frac{\cos(4x+1)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+\cot^2 x)\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her noktada türevli ve $f'(x) = x+1$, $f(2) = -1$ olduğuna göre $f(0)$ nedir?

$f'(x) = x+1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$

$\downarrow$ 2

$f(2) = 2+2+c = -1$

$4+c = -1 \Rightarrow c = -5$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 5 \Rightarrow f(0) = -5$

4) $f'(x) = 3x^2+2x$ ve $f(1) = 3$ olduğuna göre $f(-1)$ in değeri nedir?

$f(x) = x^3+x^2+c \Rightarrow 1+1+c = 3$

$c = 1$

$f(x) = x^3+x^2+1 \Rightarrow f(-1) = -1+1+1 \Rightarrow f(-1) = 1$

5) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + 3x + 1\right) dx$ nedir?

$= \int x^{1/3}dx + \int \frac{1}{x}dx + \int 3x\,dx + \int 1\,dx$

$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \ln|x| + 3.\frac{x^2}{2} + x + c$

$= \frac{3}{4}.\sqrt[3]{x^4} + \ln|x| + \frac{3x^2}{2} + x + c$

6) $\int \left(\frac{4}{x+1} + \sin x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ nedir?

$= 4 \cdot \ln|x+1| - \cos x + \arctan x + c$

7) $\int \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right) dx$ nedir?

$= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx + \int \frac{1}{x} dx$

$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln|x| + c$

$= 2\sqrt{x} + \ln|x| + c$

8) $\int (3+\tan^2 x) dx$ nedir?

$\int (1+\tan^2 x) dx + \int 2 dx = \tan x + 2x + c$

9) $\int \tan^2 x \, dx$ nedir?

$\int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int (1+\tan^2 x) dx - \int 1 \cdot dx$

$= \tan x - x + c$

10) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ nedir?

$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\Rightarrow \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ nedir?

$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$

$= \tan x - \cot x + c$

- **İntegral alma yöntemleri:**
  - Değişken değiştirme yöntemi
  - Basit kesirlere ayırma yöntemi
  - Kısmi integrasyon yöntemi

- **Değişken değiştirme yöntemi:** Hangisinin türevi diğerini ya da diğerinin genişletilmiş halini veriyorsa ona u diyoruz ve türevini alarak yerine yazıyoruz.

12) $\int f(x) \cdot f'(x) \, dx$ nedir?

$f(x) = u \Rightarrow f'(x) dx = du$

$\int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{du} = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + c$

$= \frac{[f(x)]^2}{2} + c$

13) $\int -\cos(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \, dx$ nedir?

$\cos^2 x = u \Rightarrow 2 \cdot \cos x \cdot -\sin x \, dx = du$

$-\sin 2x \, dx = du$

$\int \cos(\underbrace{\cos^2 x}_{u}) \cdot \underbrace{-\sin 2x \, dx}_{du} = \int \cos u \, du$

$= \sin u + c$

$= \sin(\cos^2 x) + c$

14) $\int 3 \cdot (x^2 - 3x + 1)^2 \cdot (2x-3) \, dx$ nedir?

$x^2 - 3x + 1 = u \Rightarrow (2x-3) dx = du$

$\int 3 \cdot (\underbrace{x^2-3x+1}_{u})^2 \cdot \underbrace{(2x-3) dx}_{du}$

$= \int 3u^2 du = u^3 + c = (x^2 - 3x + 1)^3 + c$

15) $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$ nedir?

$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du$

$\int \underbrace{\sin^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{du} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

16) $\int \tan x \, dx$ nedir?

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ ve $\cos x = u$

$-\sin x \, dx = du$

$\sin x \, dx = -du$

$\int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$

17) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ nedir?

$\cos x = u \Rightarrow -\sin x \, dx = du$

$\sin x \, dx = -du$

$\int \frac{-du}{u^2} = \int -u^{-2} du = -\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{u} + c$

$= \frac{1}{\cos x} + c$

18) $\int (\frac{2x}{3x^2+1}) dx$ nedir?

$3x^2+1 = u \Rightarrow 6x \, dx = du \Rightarrow 2x = \frac{du}{3}$

$\int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + c$

$= \frac{1}{3} \ln|3x^2+1| + c$

19) $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$ integrali nedir?

$\ln x = u \Rightarrow (\frac{1}{x}) dx = du$

$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$

20) $\int (2x-3) \cdot (x^2-3x+2)^4 dx$ nedir?

$x^2-3x+2 = u \Rightarrow (2x-3) dx = du$

$\int \underbrace{(2x-3) \, dx}_{du} \cdot \underbrace{(x^2-3x+2)^4}_{u^4} = \int u^4 du$

$= \frac{u^5}{5} + c$

$= \frac{(x^2-3x+2)^5}{5} + c$

21) $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$ nedir?

$x^2+1 = u \Rightarrow 2x \, dx = du$

$x \, dx = \frac{du}{2}$

$\int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c$

$= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c$

22) $\int \frac{2 \cdot \arctan x}{1+x^2} dx$ nedir?

$\arctan x = u \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = du$

$\int 2 \cdot \arctan x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int 2u \cdot du$

$= u^2 + c = (\arctan x)^2 + c$

23) $\int \frac{4}{\cos^2 4x} dx$ nedir?

$4x = u \Rightarrow 4 \, dx = du$

$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + c = \tan 4x + c$

24) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$ nedir?

$2x = u \Rightarrow 2 \, dx = du$

$dx = \frac{du}{2}$

$\int \frac{\frac{du}{2}}{\sin^2 u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{\cot u}{2} + c = -\frac{\cot(2x)}{2} + c$

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ nedir?

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}}$ ve $3x = u \Rightarrow 3 \, dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$

$\int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u + c$

$= \frac{1}{3} \arcsin 3x + c$

26) $\int \frac{2dx}{1+4x^2}$ nedir?

$$\int \frac{2dx}{1+4x^2} = \int \frac{2dx}{1+(2x)^2}$$

$2x = u \Rightarrow 2dx = du$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c = \arctan(2x) + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + c}$$

27) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ nedir?

$$\int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$$

28) $\int \frac{dx}{64+x^2}$ nedir?

$$\int \frac{dx}{8^2+x^2} = \frac{1}{8} \arctan \frac{x}{8} + c$$

29) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ nedir?

$$\int \frac{dx}{1+(x+2)^2} = \frac{1}{1} \cdot \arctan \left(\frac{x+2}{1}\right) + c$$

$$= \arctan(x+2) + c$$

30) $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$ nedir?

$$\int \frac{dx}{25+(x+3)^2} = \int \frac{dx}{5^2+(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{5} \arctan \left(\frac{x+3}{5}\right) + c$$

31) $\int \sin^2 x \, dx$ nedir?

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

32) $\int \cos^2 x \, dx$ nedir?

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$$\int \left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

33) $\int \sin^3 x \, dx$ nedir?

$$\int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x) \, dx$$

$\cos x = u \Rightarrow -\sin x \, dx = du$

$\sin x \, dx = -du$

$$= \int (1-u^2) \cdot -du$$

$$= \int (u^2-1) \, du = \frac{u^3}{3} - u + c$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

$$\boxed{\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]}$$

$$\boxed{\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]}$$

$$\boxed{\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]}$$

34) $\int \cos 5x \cdot \cos 3x \, dx$ nedir?

$\cos 5x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 2x}{2}\right] + c$$

$$= \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

• **Basit kesirlere ayırma yöntemi:**

Payın derecesi paydanın derecesinden küçük olmalıdır. Değilse polinom bölmesi yapılır. Payda çarpanlarına ayrılıyorsa bu yöntem kullanılır.

Karşımıza çıkabilecek durumlar

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{3x+1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

35) $\int \frac{x+3}{x^2-9x+14}\,dx$ integralinin eşiti nedir?

$$\frac{x+3}{x^2-9x+14} = \frac{A}{\underset{(x-2)}{x-7}} + \frac{B}{\underset{(x-7)}{x-2}}$$

$x+3 = A.(x-2) + B.(x-7)$

$x=2$ için $5=-5B \Rightarrow B=-1$

$x=7$ için $10=5A \Rightarrow A=2$

$$\int \frac{x+3}{x^2-9x+14}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-7} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$= \int \frac{2\,dx}{x-7} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= 2.\ln|x-7| - \ln|x-2| + c$$

36) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ nedir?

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{\underset{(x+1)}{x-1}} + \frac{B}{\underset{(x-1)}{x+1}}$$

$1 = A.(x+1) + B.(x-1)$

$x=-1$ için $1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

$x=1$ için $1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right] + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

37) $\int \frac{5x+2}{x^2-4}\,dx$ integralinin eşiti nedir?

$$\frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{A}{\underset{(x+2)}{x-2}} + \frac{B}{\underset{(x-2)}{x+2}}$$

$5x+2 = A.(x+2) + B.(x-2)$

$x=-2$ için $-8=-4B \Rightarrow B=2$

$x=2$ için $12=4A \Rightarrow A=3$

$$\int \frac{5x+2}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx$$

$$= 3.\ln|x-2| + 2.\ln|x+2| + c$$

• **Kısmi integral yöntemi:** Fonksiyon uygun olarak iki parçaya ayrılır. Bu parçalardan birine u diyerek türev, diğer parçaya dx le birlikte dv diyerek integral alıyoruz.

"LAPTÜ" sözcüğünde önce gelene u diyoruz.

L	A	P	T	Ü
↓	↓	↓	↓	↓
log. ln	arc	polinom	trigo.	üstel

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Yukarıdaki formül her soru için kullanılabilir.

☺ Ama eğer u dediğimiz ifade polinom fonksiyon ise

$$\int P(x) \cdot g(x)\, dx$$

Bu işlem türev sıfır olana kadar yapılır...

Türev	İntegral	
$P(x)$	$g(x)$	
$P'(x)$	$\int g(x)$	+
$P''(x)$	$\iint g(x)$	−
		+
		⋮

$$= P(x) \cdot \int g(x) - P'(x) \cdot \iint g(x)\, dx + \ldots$$

38) $\int x \cdot e^x\, dx$ nedir?

$x = u \Rightarrow dx = du$

$e^x dx = dv \Rightarrow e^x = v$

$$u \cdot v - \int v \cdot du = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c$$

$$= e^x \cdot (x-1) + c$$

ya da u dediğimiz polinom fonksiyon olduğu için

Türev	İntegral	
x	e^x	
1	e^x	+
0	e^x	−
	e^x	+

$$= x \cdot e^x - e^x + c$$

39) $\int (x+1) \cdot e^x\, dx$ integralinin eşiti nedir?

Türev	İntegral	
$x+1$	e^x	
1	e^x	+
0	e^x	−
	e^x	+

$$= (x+1) \cdot e^x - e^x + c$$

$$= e^x \cdot x + c$$

40) $\int x^2 \cdot e^{2x}\, dx$ integralinin eşiti nedir?

Türev	İntegral	
x^2	e^{2x}	
$2x$	$\frac{e^{2x}}{2}$	+
2	$\frac{e^{2x}}{4}$	−
0	$\frac{e^{2x}}{8}$	+
	$\frac{e^{2x}}{16}$	−

$$= x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - 2x \cdot \frac{e^{2x}}{4} + 2 \cdot \frac{e^{2x}}{8} + c$$

$$= e^{2x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + c$$

41) $\int \ln x \, dx$ nedir?

$\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$u.v - \int v.du = \ln x . x - \int x . \frac{1}{x} dx$

$= \ln x . x - \int dx$

$= \ln x . x - x + c$

$= x.(\ln x - 1) + c$

42) $\int 3x^2 . \sin x \, dx$ nedir?

Türev	integral
$3x^2$	$\sin x$
$6x$	$-\cos x$
6	$-\sin x$
0	$\cos x$

(işaretler: +, −, +)

$= 3x^2 . -\cos x + 6x.\sin x + 6.\cos x + c$

$= -3x^2 . \cos x + 6x.\sin x + 6.\cos x + c$

43) $\int \arctan x \, dx$ nedir?

$\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = du$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$u.v - \int v.du = \arctan x . x - \int x . \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \arctan x . x - \underbrace{\int \frac{x \, dx}{1+x^2}}$

$1 + x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$

$x dx = \frac{dt}{2}$

$\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c$

$= \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$

$= \arctan x . x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$

• **Belirli İntegral:**

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

• **Özellikleri:**

• $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

• $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

• $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$

• $f(x)$ fonksiyonu $[-a, a]$ aralığında sürekli olsun.

$f(x)$ tek ise $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$

$f(x)$ çift ise $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2 . \int_0^a f(x) \, dx$

44) $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx$ integralinin sonucu nedir?

$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

45) $\int_1^{\ln 3} x . e^x \, dx$ integralinin eşiti nedir?

Türev	integral
x	e^x
1	e^x
0	e^x
	e^x

(işaretler: +, −, +)

$\int_1^{\ln 3} x . e^x \, dx = (x.e^x - 1.e^x) \Big|_1^{\ln 3}$

$= e^x . (x - 1) \Big|_1^{\ln 3}$

$= e^{\ln 3} . (\ln 3 - 1) - e^1 . (1 - 1)$

$= 3.(\ln 3 - 1)$

$= \ln 27 - 3$

46) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$ nedir?

$$\int_0^1 e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\Big|_0^1 = \frac{e^3}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^3-1}{3}$$

47) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$ nedir?

$$\int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x - 1)\,dx = (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - 0)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - 0$$

$$= \frac{4-\pi}{4}$$

48) $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$ nedir?

$$1+x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$$

$$\int \frac{du}{u} \Rightarrow \ln|1+x^2|\Big|_0^1$$

$$= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} = \ln 2$$

49) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx$ integralinin eşiti nedir?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \underbrace{\sin 90}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0} = 1$$

50) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ nedir?

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\sin\pi}{4}}_{0} + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\sin 0}{4} + \frac{0}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

51) $\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\,dx$ nedir?

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = (x - \ln|x+1|)\Big|_0^{e-1}$$

$$= (e-1-\underbrace{\ln|e|}_{1}) - (0 - \underbrace{\ln 1}_{0})$$

$$= e-2$$

☺ İntegral sorularında bize yapılacak dönüşümü vererek oluşan integrali sorabilir. Bu durumda yapmamız gereken yapacağımız dönüşüm t cinsindense integralde her şeyi t ye göre değiştirmeliyiz.

52) $\int_4^{25} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ integralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

- önce sınırları değiştirelim;

$x=4 \Rightarrow u=2$

$x=25 \Rightarrow u=5$

- sonra $u=\sqrt{x}$ in türevini alalım;

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2\underbrace{\sqrt{x}}_{u}.du = 2u\,du$$

$\int_2^5 \frac{1+u}{1-u}.2u.du$ integrali elde edilir.

53) $\int_0^{\ln 3} (e^{3x} - e^x)\,dx$ integralinde $e^x = t$ dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

- önce sınırları değiştirelim;

$x=0$ için $t=1$

$x=\ln 3$ için $t=3$

- sonra $e^x = t$ nin türevini alalım;

$$e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$\int_1^3 (t^3 - t).\frac{dt}{t} = \int_1^3 (t^2-1)\,dt$ elde edilir.

54) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ integralinde $x=2\sin t$ dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

- önce sınırları değiştirelim;

$x=0$ için $t=0$

$x=2$ için $t=\pi/2$

- sonra $x=2\sin t$ nin türevini alalım;

$dx = 2\cos t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{4-4\sin^2 t}}_{2.\cos t} . 2\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt$ elde edilir.

55) $\int (\arcsin x)^2 dx$ integralinde $u=\arcsin x$ dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

- $u=\arcsin x \Rightarrow \sin u = x$ (türevi alınırsa)

$\cos u\,du = dx$

$= \int u^2.\cos u.du$ elde edilir.

56) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(\arccos x)\,dx$ integralinde $t=\arccos x$ dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

- önce sınırları değiştirelim;

$t=\arccos x \Rightarrow x=\cos t$

$x=0$ için $t=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ için $t=\frac{\pi}{4}$

- sonra $x=\cos t$ nin türevini alalım;

$dx = -\sin t\,dt$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t.-\sin t.dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2 t\,dt$ elde edilir.

☺ Mutlak değer fonksiyonun integrali alınırken kritik noktaya göre parçalanarak işlem yapılır.

57) $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$ nedir?

$= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x\,dx$

$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$

$= -\left[\frac{0}{2}-\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}-\frac{0}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

58) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| dx$ nedir?

$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$ kritik noktadır.

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\sin x + \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx$

$= \left(\cos x + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\cos x - \frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\cos 30 + \frac{\pi}{12}\right) - \left(\cos 0 + \frac{0}{2}\right) + \left(-\cos 90 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$

59) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |2x-1|\,dx$ nedir?

$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ kritik noktadır.

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\,dx = (-x^2+x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$

- İntegral işareti altında türev alınırsa

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

$\Rightarrow F'(x) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$ dır.

60) $f(x)=\int_{1}^{\ln x} e^{t^2}\,dt$ ise $f'(e)$ nin değeri nedir?

$f'(x) = e^{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x} - e^{1}\cdot 0$

$\Rightarrow f'(x) = e^{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$

$f'(e) = e.\frac{1}{e} \Rightarrow f'(e) = 1$

61) $F(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}} \frac{t^3}{t^2+2}\,dt$ ise $F'(1)$ nedir?

$F'(x) = \left(\frac{x\sqrt{x}}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\cdot 0$

$F'(1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

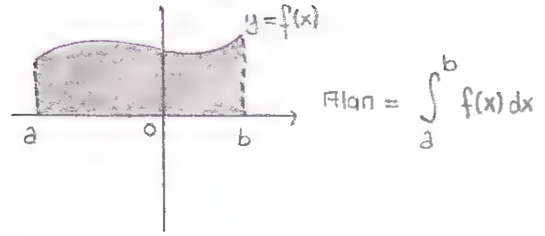
62) $f(x)=\int_{x+1}^{e^x} \ln t\,dt$ olarak veriliyor. Buna göre $f'(4)$ nedir?

$f'(x) = \ln e^x \cdot e^x - \ln(x+1).1$

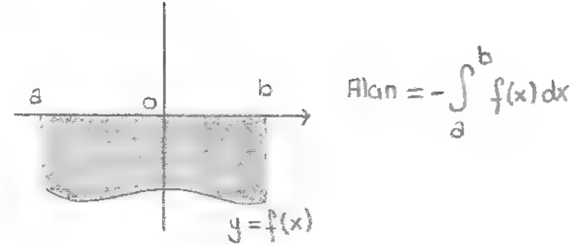
$\Rightarrow f'(x) = x.e^x - \ln(x+1)$

$f'(4) = 4.e^4 - \ln 5$

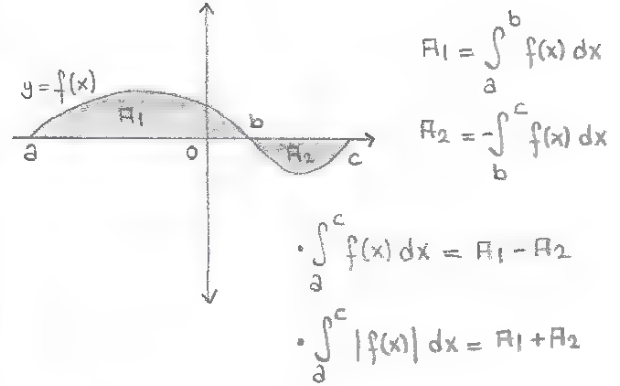
- İntegralde Alan:



$$\text{Alan} = \int_a^b f(x)\,dx$$



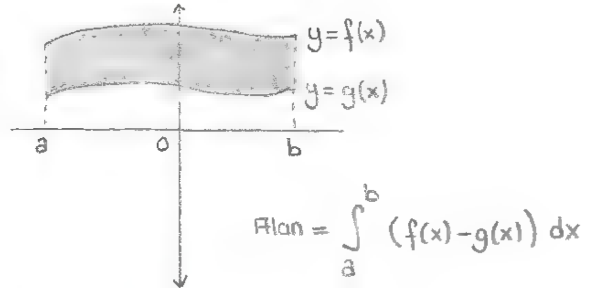
$$\text{Alan} = -\int_a^b f(x)\,dx$$



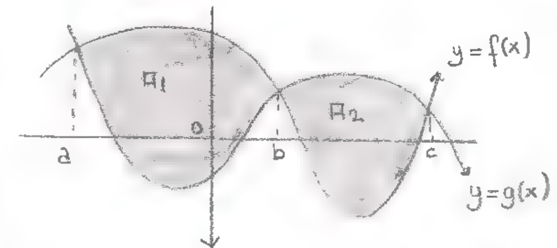
$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

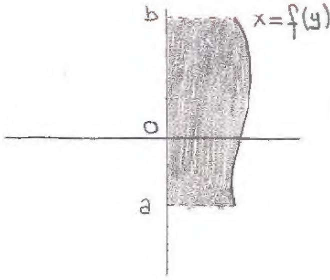
- $\int_a^c f(x)\,dx = A_1 - A_2$
- $\int_a^c |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$



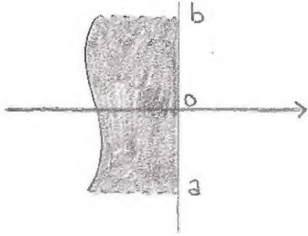
$$\text{Alan} = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



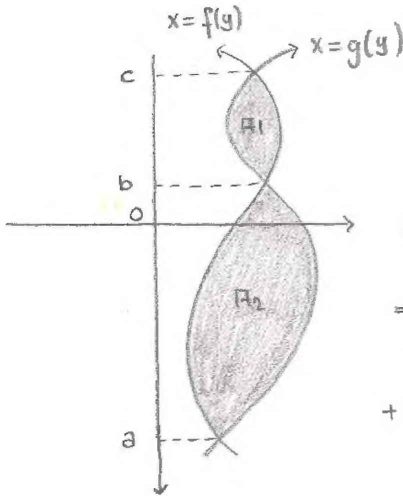
$$\text{Alan} = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx + \int_b^c (g(x)-f(x))\,dx$$



$$\text{Alan} = \int_a^b f(y)\,dy$$



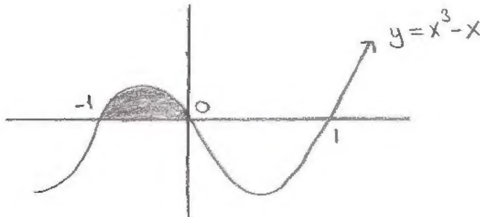
$$\text{Alan} = -\int_a^b f(y)\,dy$$



$$\text{Alan} = A_1 + A_2$$

$$= \int_a^b (g(y)-f(y))\,dy + \int_b^c (f(y)-g(y))\,dy$$

63) $y=x^3-x$ eğrisi ile apsisler ekseninin sınırladığı alanlardan üst taraftakinin değeri nedir?

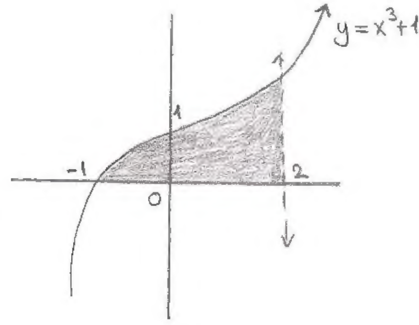


$$\text{Alan} = \int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= 0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

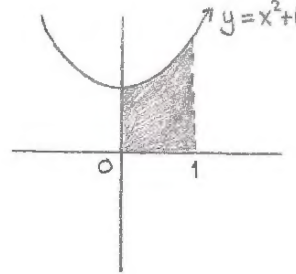
64) $y=x^3+1$ eğrisi, $x=2$ doğrusu ve apsisler ekseni arasındaki alan nedir?



$$\text{Taralı alan} = \int_{-1}^{2} (x^3+1)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$=(4+2)-\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{27}{4}$$

65) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$ ve $x=1$ arasında kalan bölgenin alanı nedir?

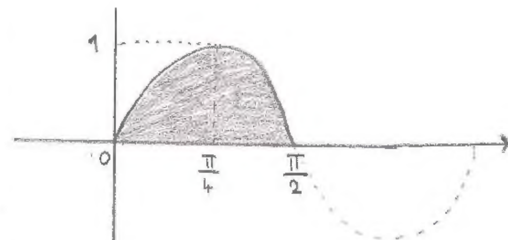


$$\text{Alan} = \int_0^1 (x^2+1)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1$$

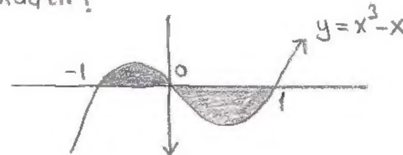
$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-(0+0) = \frac{4}{3}$$

66) $y=\sin 2x$ eğrisi $x=\frac{\pi}{2}$ doğrusu ve Ox ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$$\text{Alan} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

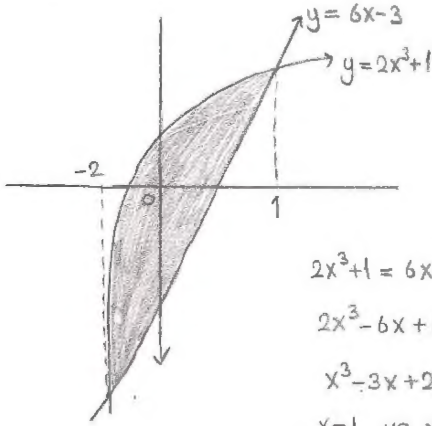
67) $y=x^3-x$ eğrisi ile x ekseni arasındaki alan kaçtır?



$$\text{Alan} = \int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx + \int_0^1 (x^3-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

68) $y=2x^3+1$ ve $y=6x-3$ eğrilerinin sınırlandırdığı alan kaçtır?



$2x^3+1 = 6x-3$

$2x^3-6x+4 = 0$

$x^3-3x+2 = 0$

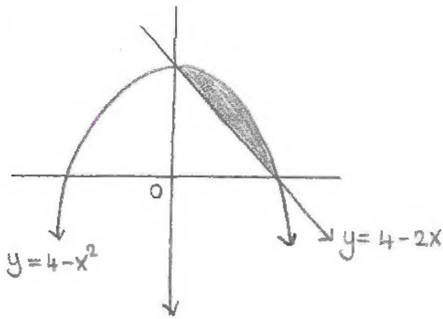
$x=1$ ve $x=-2$

$$\text{Alan} = \int_{-2}^{1} \left(2x^3+1-(6x-3)\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2x^3+1-6x+3)\, dx$$

$$= \left(\frac{2x^4}{4}+x-3x^2+3x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{27}{2}$$

69)



Şekilde parabol ile doğru arasında kalan bölgenin alanı nedir?

$4-x^2=4-2x \Rightarrow x^2-2x=0$

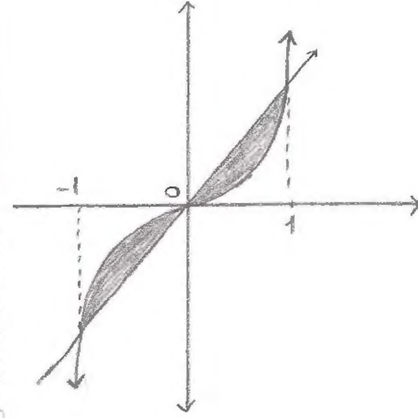
$x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$

$$\text{Alan} = \int_0^2 \left(4-x^2-(4-2x)\right) dx$$

$$= \int_0^2 (4-x^2-4+2x)\, dx = \int_0^2 (-x^2+2x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

70) $y=x^3$ eğrisi ve $y=x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$x^3=x$

$x^3-x=0$

$x(x^2-1)=0$

$x=0$

$x=-1$

$x=1$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{0} (x^3-x)\, dx + \int_0^1 (x-x^3)\, dx$$

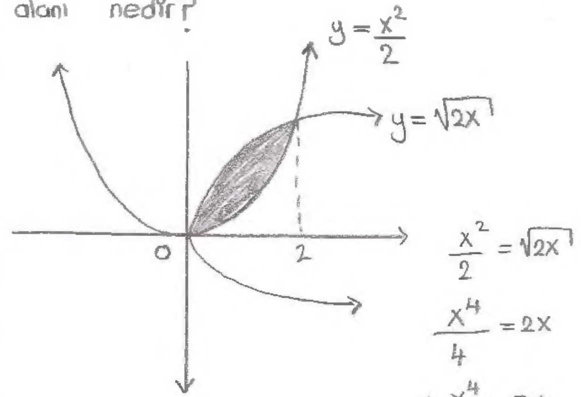
$$= \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= 0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-0$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

71) $x^2=2y$

$y^2=2x$ eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanı nedir?



$\frac{x^2}{2}=\sqrt{2x}$

$\frac{x^4}{4}=2x$

$\Rightarrow x^4=8x$

$x=0$, $x=2$

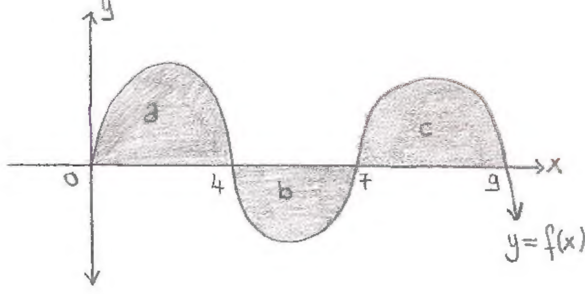
$$\text{Alan} = \int_0^2 \left[\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right] dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\, dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

72)



Yukarıda verilen taralı bölgenin alanları sırasıyla a, b, c birimdir.

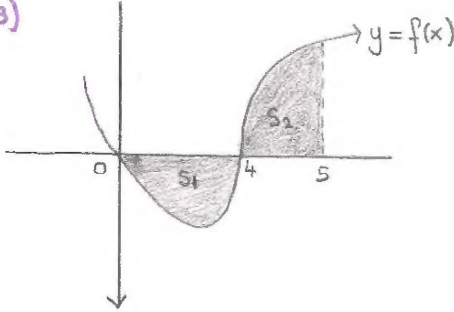
Buna göre $\int_0^9 |f(x)|\,dx - \int_0^7 f(x)\,dx$ in değeri nedir?

$\int_0^9 |f(x)|\,dx = a+b+c$

$\int_0^7 f(x)\,dx = a-b$

$\Rightarrow (a+b+c)-(a-b) = \cancel{a}+b+c-\cancel{a}+b = 2b+c$

73)



$\int_0^5 f(x)\,dx = -\frac{25}{3}$ ve $S_1 = \frac{32}{3}$ birim kare olduğuna göre S_2 nedir?

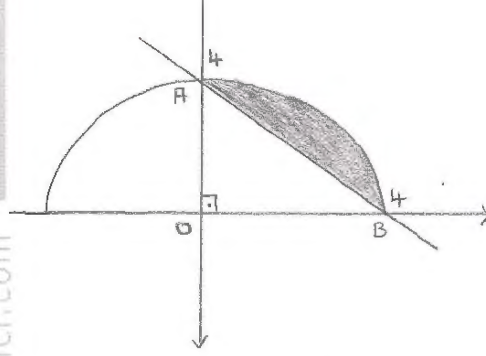
$\int_0^5 f(x)\,dx = S_2 - S_1$

$-\frac{25}{3} = S_2 - \frac{32}{3}$

$\Rightarrow S_2 = \frac{32}{3} - \frac{25}{3}$

$= \frac{7}{3}$

74) $\int_0^4 \left(\sqrt{16-x^2} - (4-x)\right) dx$ nedir?

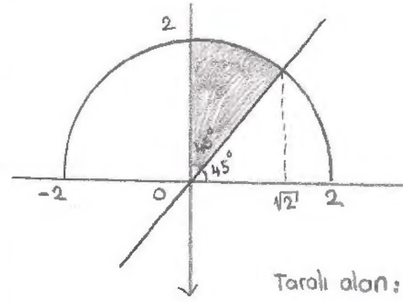


Alan = (4 te bir daire alanı) − (A(AOB) üçgeninin alanı)

$= 4\pi - 8$

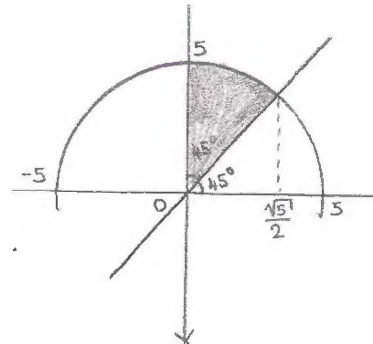
$= 4(\pi - 2)$

75) $\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2} - x\right) dx$ nedir?



Taralı alan: $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi \cdot 4 \cdot \frac{45}{360} = \frac{\pi}{2}$

76) $\int_0^{\frac{5}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{25-x^2} - x\right) dx$ nedir?

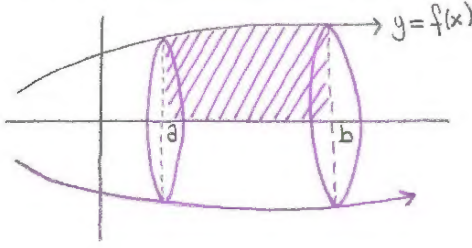


Taralı alan: $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{45}{360} = \frac{25\pi}{8}$

ozelogrenci.com
Özel olduğunuzu hissedeceksiniz...

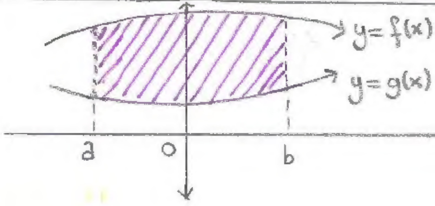
• **İntegralde hacim:**

• **X - ekseni etrafında dönme:**



$y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ ve $y=0$ doğrularının belirttiği bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin

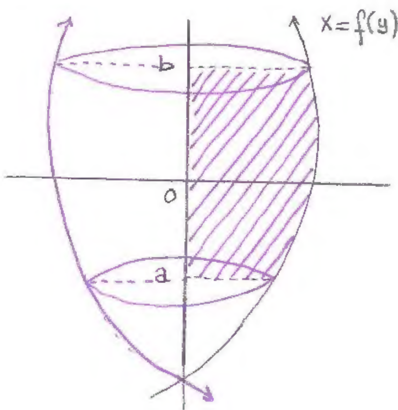
$$\text{hacmi} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$



$y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrilerinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin

$$\text{hacmi} = \pi \cdot \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

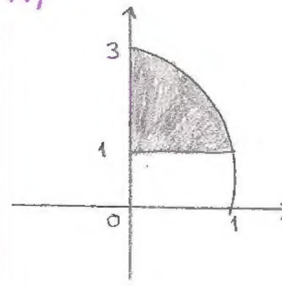
• **y - ekseni etrafında dönme:**



$x=f(y)$ eğrisi, $y=a$, $y=b$ ve $x=0$ doğrularının belirttiği bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin

$$\text{hacmi} : \pi \cdot \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

77)



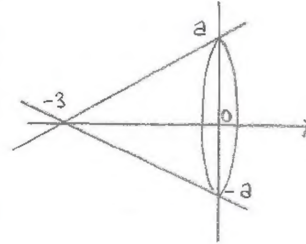
Birinci bölgede y ekseni $y=1$ doğrusu ve $9x^2+y^2=9$ elipsi arasında kalan bölge y ekseni etrafında 360° döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmi nedir?

$$\text{Hacim} = \pi \cdot \int_1^3 \left(\frac{9-y^2}{9}\right) dy$$

$$= \pi \cdot \int_1^3 \left(1-\frac{y^2}{9}\right) dy = \pi \cdot \left(y - \frac{y^3}{27}\right)\Bigg|_1^3$$

$$= \pi \cdot \left[(3-1) - \left(1-\frac{1}{27}\right)\right] = \frac{28\pi}{27}$$

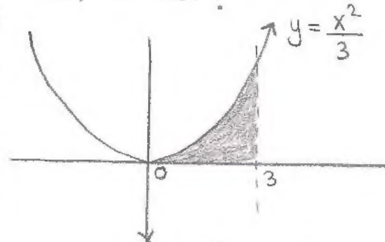
78) Denklemi $\frac{-x}{3} + \frac{y}{a} = 1$ olan doğru ve koordinat eksenleriyle sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan koninin hacmi 16π birim küptür. Buna göre a nın değeri kaç olabilir?



Koninin hacmi : $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

$$\frac{\pi \cdot a^2 \cdot 3}{3} = 16\pi \Rightarrow a = \pm 4$$

79) $y = \frac{1}{3}x^2$ eğrisi, $x=3$ doğrusu ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?



$$\text{Hacim} = \pi \cdot \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 \frac{x^4}{9} dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{45}\right)\Bigg|_0^3 = \pi \cdot \frac{243}{45} = \frac{\pi \cdot 27}{5} \Rightarrow \frac{27\pi}{5}$$

ozelogrenci.com
Özel olduğunuzu hissedeceksiniz...